

Invariantes Algebraicos y Funciones de Hilbert en Álgebra y Geometría

Rafael Heraclio Villarreal Rodríguez
martes 28 de abril de 2026, 12:30–13:20 hrs

65 Aniversario del Departamento de Matemáticas del
Cinvestav
28 al 30 de abril de 2026, Auditorio José Adem

En esta plática vamos a considerar un **campo base** K que puede ser:

$$K = \mathbb{Q},$$

$$K = \mathbb{R},$$

$$K = \mathbb{C},$$

$$K = \mathbb{Z}_p, \text{ enteros módulo un primo } p.$$

$$K = \mathbb{F}_q, \text{ campo finito con } q \text{ elementos.}$$

Sean $S = K[t_1, \dots, t_s]$ un anillo de polinomios con coeficientes en K en las variables $t_1, \dots, t_s$,

$g_1, \dots, g_n$ polinomios en S ,

$$I = (g_1, \dots, g_n) = \{h_1 g_1 + \dots + h_n g_n : h_i \in S \forall i\}$$

el ideal de S generado por $g_1, \dots, g_n$.

Los tres invariantes algebraicos asociados al ideal I son:

$\dim(S/I)$, *dimensión*,

$\deg(S/I)$, *grado*,

$\text{reg}(S/I)$, *regularidad*.

Sean $S = K[t_1, \dots, t_s] = S_0 \oplus S_1 \oplus \dots \oplus S_d \oplus \dots$
con la *graduación estandar*, i.e.,

$S_0 = K$, constantes,

$S_1 = Kt_1 \oplus \dots \oplus Kt_s$, formas lineales,

$S_2 = \bigoplus_{i \leq j} Kt_i t_j$, formas cuadráticas,

$\vdots$

$S_d = \bigoplus_{(a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{N}^s, \sum_{i=1}^s a_i = d} Kt_1^{a_1} \dots t_s^{a_s}$, formas de grado d .

$S_{\leq d} := S_0 \oplus \dots \oplus S_d$ polinomios de grado a lo mas d .

Función de Hilbert afín

Sea $S = K[t_1, \dots, t_s]$ un anillo de polinomios y sea $I \subsetneq S$ un ideal. La *función de Hilbert afín* de S/I se define como

$$H_I^a(d) := \dim_K(S_{\leq d}/I_{\leq d}) \quad d = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $I_{\leq d}$ es $S_{\leq d} \cap I$.

Teorema (Hilbert)

Existe un único polinomio $h_I(z) \in \mathbb{Q}[z]$ tal que

$$H_I^a(d) = h_I(d) \quad \text{para } d \gg 0.$$

El polinomio $h_I(z)$ se llama el *polinomio de Hilbert* de S/I .

Dimensión, grado, y regularidad

Podemos escribir el **polinomio de Hilbert** de S/I como:

$$h_I(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

donde $a_k \neq 0$ y $a_i \in \mathbb{Q}$ para todo i .

Definimos:

(**dimensión**) $\dim(S/I) := k = \text{grado}(h_I(z))$,

(**grado**) $\deg(S/I) := k! a_k$,

(**regularidad**) $\text{reg}(S/I)$ es el menor entero $r \geq 0$ tal que $H_I^a(d) = h_I(d)$ para $d \geq r$.

El grado es siempre un entero positivo, es decir, $k! a_k$ es un entero positivo.

Ejemplo

Si $I = (0)$, tenemos $S_{\leq d}/I_{\leq d} = S_{\leq d} = S_0 \oplus \cdots \oplus S_d$

$$\begin{aligned} H_I^a(d) &= \dim_K(S_{\leq d}) = \sum_{i=0}^d \dim_K(S_i) = \sum_{i=0}^d \binom{i+s-1}{s-1} \\ &= \binom{d+s}{s} = \frac{(d+1) \cdots (d+s)}{s!}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el **polinomio de Hilbert** de S es:

$$h_I(z) = \binom{z+s}{s} = \frac{(z+1) \cdots (z+s)}{s!},$$

luego los invariantes algebraicos de S son

$$\dim(S) = \text{grado}(h_I(z)) = s, \quad \deg(S) = 1, \quad \text{reg}(S) = 0.$$

El cálculo de

$h_I(z)$, *polinomio de Hilbert*,

$\dim(S/I)$, *dimensión*,

$\deg(S/I)$, *grado*, y

$\operatorname{reg}(S/I)$, *regularidad*,

se puede realizar usando *bases de Gröbner*. El sistema de software algebraico *Macaulay2* tiene funciones para calcular estos invariantes de manera directa.

Proposición

Si $I \subsetneq S$ es un ideal, entonces

$$\begin{aligned}\dim(S/I) &= \text{grado}(h_I(z)) \\ &= \max\{n \mid \text{existe una cadena } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n \\ &\quad \text{de ideales primos de } S\}.\end{aligned}$$

- Este resultado nos dice que el grado del polinomio de Hilbert de S/I es la **dimensión de Krull** de S/I como anillo.
- Si $K = \mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^s$ tiene la topología de Zariski, entonces $\dim(S)$ es igual a

$$\max\{n \mid \text{existe una cadena } Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n \\ \text{de conjuntos cerrados irreducibles de } \mathbb{C}^s\}.$$

Vamos a introducir tres problemas donde la *dimensión*, el *grado*, y la *regularidad* juegan un papel importante:

- 1 Como podemos definir y calcular la *dimensión* de una *variedad afín*?
- 2 Como podemos calcular el *número de raíces* de un polinomio en varias variables sobre un campo finito?
- 3 Como podemos resolver el problema de *interpolación polinomial* en varias variables?

La dimensión de una variedad afín

Una **variedad afín** X es el conjunto de ceros de un sistema finito de ecuaciones polinomiales:

$$X := V_{K^s}(g_1, \dots, g_n) = \{P \in K^s : g_i(P) = 0 \text{ para todo } i\},$$

donde $g_1, \dots, g_n$ son polinomios en $S = K[t_1, \dots, t_s]$.

Si $X \neq \emptyset$, la **dimensión** de X se define como:

$$\dim(X) := \dim(S/I(X)),$$

donde $I(X)$ es el **ideal anulador** de X que consiste de todos los polinomios de S que se anulan en X .

Teorema

Si $K = \mathbb{C}$ y $I = (g_1, \dots, g_n)$, entonces

$$X = V_{\mathbb{C}^s}(I) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \dim(X) = \dim(S/I).$$

Este resultado se sigue del teorema de los *ceros de Hilbert* (Nullstellensatz):

$$I(V_{\mathbb{C}^s}(I)) = \text{rad}(I)$$

El grado y los ceros de polinomios

Si $X \subset K^s$, $|X| < \infty$, y $0 \neq f \in S$, entonces el número de raíces de f en X está dado en términos del **grado** por

$$|V_X(f)| = \begin{cases} \deg(S/(I(X), f)) & \text{si } (I(X): f) \neq I(X), \\ 0 & \text{si } (I(X): f) = I(X). \end{cases}$$

Donde $(I(X): f) := \{g \in S \mid gf \in I(X)\}$.

Corolario

Si $K = \mathbb{F}_q$, $X = \mathbb{F}_q^s$, y $0 \neq f \in S$, entonces

$$|V_X(f)| = \deg(S/(I(X), f)) \text{ si } (I(X): f) \neq I(X),$$

$V_X(f) = \emptyset$ si $(I(X): f) = I(X)$, donde $I(X) = (\{t_i^q - t_i\}_{i=1}^s)$.

Consideremos un sistema de ecuaciones polinomiales

$$g_i(t_1, \dots, t_s) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, s$$

y sea $V_{K^s}(g_1, \dots, g_n)$ la variedad afín de todas las soluciones de este sistema.

Teorema

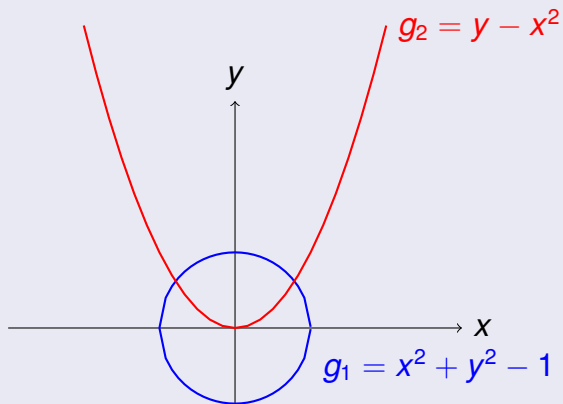
Suponiendo que $\dim(S/(g_1, \dots, g_n)) = 0$, tenemos:

(a) $|V_{K^s}(g_1, \dots, g_n)| \leq \deg(S/(g_1, \dots, g_n)),$

(b) *Si $K = \mathbb{C}$ y $(g_1, \dots, g_n) \subsetneq S$, entonces $V_{K^s}(g_1, \dots, g_n) \neq \emptyset$, y además*

$$|V_{K^s}(g_1, \dots, g_n)| = \deg(S/\text{rad}(g_1, \dots, g_s)).$$

Ejemplo



$$K = \mathbb{R}$$

$$V_{K^2}((g_1, g_2)) \leq \deg(S/(g_1, g_2)) = 4$$

Continuación Ejemplo

Sean $S = K[x, y]$,

$g_1 = x^2 + y^2 - 1$ (círculo),

$g_2 = y - x^2$ (parábola).

Consideremos el ideal $I = (g_1, g_2) = (y^2 + y - 1, x^2 - y)$.

Como $\dim(S/(g_1, g_2)) = 0$, por el teorema anterior:

$$|V_{K^2}(I)| \leq \deg(S/I) = 4$$

con $|V_{K^2}(I)| = \deg(S/I) = 4$ si $K = \mathbb{C}$ pues $I = \text{rad}(I)$.

Si $K = \mathbb{R}$, $|V_{\mathbb{R}^2}(I)| = 2$, ver figura anterior.

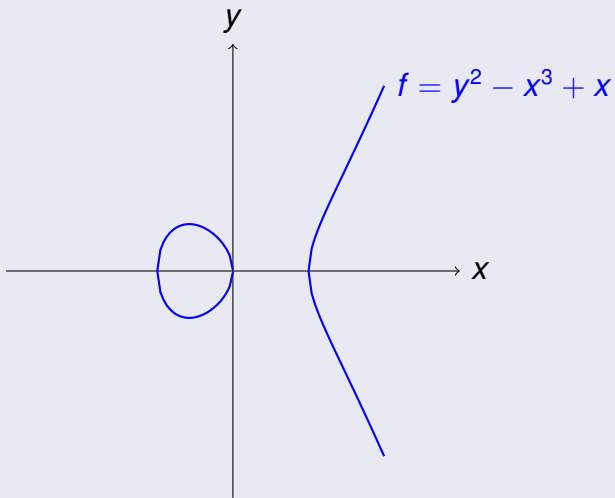
Si $K = \mathbb{Q}$, entonces un punto (x_0, y_0) en $V_{\mathbb{Q}^2}(I)$ satisface la ecuación $y^2 + y - 1 = 0$, y obtenemos $V_{\mathbb{Q}^2}(I) = \emptyset$.

El ejemplo anterior se relaciona con el siguiente resultado:

Teorema de Bézout

Dos polinomios primos relativos $f(t_1, t_2), g(t_1, t_2) \in \mathbb{C}[t_1, t_2]$ de grados d_1 y d_2 pueden tener como máximo $d_1 d_2$ soluciones simultaneas.

Curva elíptica sobre el campo finito $K = \mathbb{R}$



Curva elíptica $f = y^2 - x^3 + x$ sobre $K = \mathbb{F}_{71}$

La **curva elíptica** $C = V_{K^2}(f) \cup \{\mathcal{O}\}$ tiene estructura de grupo. Estas curvas se usan en criptografía.

La curva elíptica es **suave** pues para todo punto (x_0, y_0) sobre la curva $V_{K^2}(f)$ las derivadas parciales

$$\partial f / \partial x = -3x^2 + 1 \quad \text{y} \quad \partial f / \partial y = 2y,$$

no se anulan simultáneamente.

Calculando número de ceros de f usando el grado

$S = K[x, y]$, $K = \mathbb{F}_{71}$, $X = \mathbb{F}_{71}^2$.

Cuántos ceros tiene $f = y^2 - x^3 + x$ en X ?

Usando *Macaulay2*, obtenemos que el polinomio

$$f = y^2 - x^3 + x$$

tiene 71 ceros en $X = K^2$. La correspondiente curva elíptica

$$C = V_X(f) \cup \{\mathcal{O}\}$$

tiene 72 puntos. En este caso $I(X) = (x^{71} - x, y^{71} - y)$,

$$|V_X(f)| = \deg(\mathbb{F}_{71}[x, y]/(I(X), f)) = 71$$

Interpolación de Lagrange

Dados $(P_1, c_1), \dots, (P_m, c_m)$, puntos en $\mathbb{R}^2$ con $P_1, \dots, P_m$ puntos distintos en $\mathbb{R}$, existe un único polinomio $f \in \mathbb{R}[t]$ de grado como máximo $m - 1$ que pasa por esos puntos, es decir, $f(P_i) = c_i$ para todo $i = 1, \dots, m$.

A f se le llama el **polinomio de interpolación de Lagrange**.

Interpolación en una variable

Sean $S = K[t]$ anillo de polinomios en una variable t ,
 $X = \{P_1, \dots, P_m\}$ un conjunto de puntos distintos en K ,
y $d \geq 1$ un entero.

Problema de Interpolación:

Dados escalares $c_1, \dots, c_m$ en K , cuando existe
 $f \in K[t]_{\leq d}$ tal que $f(P_i) = c_i$ para $i = 1, \dots, m$?

Sea $K = \mathbb{F}_q$ un campo finito. La función K -lineal

$$T: S \rightarrow K^m, \quad f \mapsto (f(P_1), \dots, f(P_m)),$$

induce una función K -lineal para cada entero $d \geq 1$:

$$T_d: S_{\leq d} \rightarrow K^m, \quad f \mapsto (f(P_1), \dots, f(P_m)).$$

La imagen de $S_{\leq d}$ bajo T_d , denotada por $C_X(d)$, se llama un **código Reed–Solomon** de grado d en X .

Reformulación Problema de Interpolación:

para que valores de d se satisface $C_d(X) = K^m$?

cual es el menor entero $d \geq 1$ tal que $C_d(X) = K^m$?

Usando la definición de T_d se tiene que:

$$S_{\leq d}/I(X)_{\leq d} \simeq C_X(d).$$

Usando el algoritmo de la división obtenemos:

$$I(X) = ((t - P_1) \cdots (t - P_m)).$$

En este contexto la *función de Hilbert Afín* de $S/I(X)$, se denota por $H_X^a(d)$, y esta definida como

$$H_X^a(d) := \dim_K(S_{\leq d}/I(X)_{\leq d}) = \dim_K(C_X(d)).$$

Sea $g(t) = (t - P_1) \cdots (t - P_m)$. Es fácil ver que

$\{\bar{1}, \bar{t}, \dots, \bar{t}^d\}$ es K -base de $S_{\leq d}/(g(t))_{\leq d}$ si $d < m - 1$,

$\{\bar{1}, \bar{t}, \dots, \bar{t}^{m-1}\}$ es K -base de $S_{\leq d}/(g(t))_{\leq d}$ si $d \geq m - 1$,

$$H_X^a(d) = \begin{cases} d + 1 & \text{si } 1 \leq d < m - 1 \\ m & \text{si } d \geq m - 1. \end{cases}$$

En particular $H_X^a(d) = m$ si y solo si $C_X(d) = K^m$.

El menor entero $d \geq 1$ para el que existe **interpolación polinomial** es $d = m - 1$, es decir, $\text{reg}(S/I(X)) = m - 1$.

La **distancia mínima** de $C_X(d)$, denotada por $\delta_X(d)$, se define como

$$\delta_X(d) := \min\{|X \setminus V_X(f)| : f \in S_{\leq d} \setminus I(X)\},$$

donde $V_X(f) = \{\alpha \in X \mid f(\alpha) = 0\}$.

Proposición

Supongamos que para algún $d \geq 1$ no hay interpolación polinomial, es decir, $d < \text{reg}(S/I) = m - 1$. Entonces La distancia mínima de $C_X(d)$ es

$$\delta_X(d) = m - d \geq 2.$$

Demostración

Notar $|X \setminus V_X(f)| = m - d$, donde $f = (t - P_1) \cdots (t - P_d)$. Por lo tanto $\delta_X(d) \leq m - d$.

Sea f cualquier polinomio en $S_{\leq d} \setminus I(X)$. Entonces f tiene a lo más d raíces X , esto es, $|V_X(f)| \leq d$. Entonces

$$|X \setminus V_X(f)| \geq m - d,$$

y tenemos $\delta_X(d) \geq m - d$.

Códigos capaces de corregir errores en la transmisión de información deben tener distancia mínima mayor que 2 pues $C_X(d)$ puede corregir hasta e errores, donde

$$e = \left\lfloor \frac{\delta_X(d) - 1}{2} \right\rfloor.$$

Esta es la razón de buscar códigos con distancia mínima grande.

Parámetros Básicos de $C_X(d)$

- **Longitud:** $m = |X|$
- **Dimensión:** $\dim_K(C_X(d)) = d + 1$ para $d < m - 1$
- **Distancia mínima:** $\delta_X(d) = m - d$ para $d < m - 1$
- $\delta_X(d) = |X| - \dim_K(C_X(d)) + 1$ (en general “ $\leq$ ”)

La regularidad en interpolación polinomial multivariada

Sean $X = \{P_1, \dots, P_m\}$ un conjunto finito de puntos distintos en el espacio afín $\mathbb{A}^s := K^s$ y $d \geq 1$ un entero.

Problema de Interpolación Polinomial:

Dados escalares $c_1, \dots, c_m$ en K , cuando existe $f \in S_{\leq d}$ tal que $f(P_i) = c_i$ para $i = 1, \dots, m$?

Respuesta: Si I es el ideal anulador de X y $d = \text{reg}(H_I)$, entonces existe un único $f \in S_{\leq d}$ tal que f es estandard con respecto al orden lexicográfico de S y $f(P_i) = c_i$ para todo $i = 1, \dots, m$.

Generalizando los Códigos Reed-Solomon

Sean $K = \mathbb{F}_q$ un campo finito con q elementos

$$X = \{P_1, \dots, P_m\} \subset K^s,$$

$S = K[t_1, \dots, t_s]$ anillo de polinomios,

El *código afín tipo Reed-Muller* es:

$$C_X(d) := \{(f(P_1), \dots, f(P_m)) \mid f \in S_{\leq d}\} \subset K^m.$$

Parámetros básicos

- **Longitud:** $m = |X| = \deg(S/I(X))$,
- **Dimensión:** $\dim_K(C_X(d)) = H_{I(X)}^a(d)$,
- **Distancia mínima:**

$$\delta_X(d) := \min\{|X \setminus V_X(f)| : f \in S_{\leq d} \setminus I(X)\}.$$

Cota de Singleton

$$\delta_X(\mathbf{d}) \leq |X| - \dim_K(C_X(\mathbf{d})) + 1.$$

La distancia mínima es difícil de calcular pero se puede estimar usando bases de Gröbner.

Funciones de Hilbert de ideales graduados

- Sea $S = K[t_1, \dots, t_s] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$ un anillo de polinomios con la graduación estándar, K un campo.
- $I \subset S$ es un ideal graduado de dimensión $k = \dim(S/I)$.
- La *función de Hilbert* de S/I es:

$$H_I(d) := \dim_K(S_d/I_d), \quad d = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $I_d = I \cap S_d$.

Teorema (Hilbert)

Existe un polinomio $h_I(t) \in \mathbb{Q}[t]$ de grado $k - 1$ tal que

$$H_I(d) = h_I(d) \text{ para } d \gg 0$$

- El *grado* de S/I , denotado por $\deg(S/I)$, es el entero positivo

$$\deg(S/I) := \begin{cases} (k-1)! \lim_{d \rightarrow \infty} H_I(d)/d^{k-1} & \text{si } k \geq 1 \\ \dim_K(S/I) & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

- La *regularidad* de S/I , denotada $\operatorname{reg}(S/I)$, es el menor entero $r \geq 0$ tal que $H_I(d) = h_I(d)$ para $d \geq r$.

Ideales anuladores

Los códigos afines tipo Reed–Muller se generalizan usando el espacio proyectivo.

- $\mathbb{P}^{s-1}$ es el espacio proyectivo sobre $K = \mathbb{F}_q$
- $\mathbb{X}$ es un subconjunto de $\mathbb{P}^{s-1}$
- $I(\mathbb{X}) \subset S$ es el *ideal anulador* de $\mathbb{X}$
- $S/I(\mathbb{X})$ es un anillo graduado Cohen–Macaulay de dimensión 1
- La función de Hilbert de $S/I(\mathbb{X})$ se denota por $H_{\mathbb{X}}(d)$

Códigos proyectivos tipo Reed–Muller

Sea $K = \mathbb{F}_q$ un campo finito,

$\mathbb{X} = \{[P_1], \dots, [P_m]\} \subset \mathbb{P}^{s-1}$ con $m = |\mathbb{X}|$.

Fijamos un entero $d \geq 1$. Hay una función K -lineal:

$$T_d: S_d \rightarrow K^m, \quad f \mapsto (f(P_1), \dots, f(P_m)).$$

La imagen de S_d bajo T_d , denotada $C_{\mathbb{X}}(d)$, se llama un *código proyectivo de tipo Reed–Muller* de grado d .

La relación entre los *parámetros básicos* del código lineal de tipo Reed–Muller $C_{\mathbb{X}}(d)$ y la funciones de Hilbert es:

- (a) *longitud*: $|\mathbb{X}| = \deg(S/I(\mathbb{X}))$,
- (b) *dimensión*: $\dim_K C_{\mathbb{X}}(d) = H_{\mathbb{X}}(d)$,
- (c) *distancia mínima*:

$$\delta_{\mathbb{X}}(d) = \min\{\|v\| : 0 \neq v \in C_{\mathbb{X}}(d)\},$$

donde $\|v\|$ es el número de entradas no cero de v .

- (d) $\delta_{\mathbb{X}}(d) = 1$ for $d \geq \text{reg}(S/I(\mathbb{X}))$.

Lemma

Si $0 \neq f \in S$ es homogéneo, entonces el número de ceros de f en $\mathbb{X}$ está dado por

$$|V_{\mathbb{X}}(f)| = \begin{cases} \deg(S/(I(\mathbb{X}), f)) & \text{si } (I(\mathbb{X}): f) \neq I(\mathbb{X}), \\ 0 & \text{si } (I(\mathbb{X}): f) = I(\mathbb{X}). \end{cases}$$

Example

Usando *Macaulay2*, obtenemos que el polinomio

$$f = t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 + t_1 t_2 t_3$$

tiene 18 ceros en $\mathbb{X} = \mathbb{P}^2$ sobre el campo $K = \mathbb{F}_{13}$. Notar que el ideal anulador de $\mathbb{P}^2$ es:

$$I(\mathbb{X}) = (t_1^{13} t_2 - t_1 t_2^{13}, t_1^{13} t_3 - t_1 t_3^{13}, t_2^{13} t_3 - t_2 t_3^{13}).$$

Sea $I = I(\mathbb{X})$. La distancia mínima se expresa como:

$$\begin{aligned}\delta_{\mathbb{X}}(d) &= \min\{\|T_d(f)\| : T_d(f) \neq 0; f \in S_d\} \\ &= \min\{|\mathbb{X} \setminus V_{\mathbb{X}}(f)| : f \in S_d \setminus I(\mathbb{X})\} \\ &= |\mathbb{X}| - \max\{\deg(S/(I, f)) : f \in S_d \setminus I; (I : f) \neq I\}\end{aligned}$$

Para códigos tipo Reed-Muller esta fórmula en términos del grado permite calcular la distancia mínima usando bases de Gröbner.

Example

Sean $S = \mathbb{F}_3[t_1, t_2, t_3]$ y $\mathbb{X}$ el conjunto de puntos en $\mathbb{P}^2$:

$$\begin{aligned} &[(1, 1, 0)], [(1, -1, 0)], [(1, 0, 1)], \\ &[(1, 0, -1)], [(1, -1, -1)], [(1, 1, 1)]. \end{aligned}$$

Entonces $I(\mathbb{X}) = (t_2^2 t_3 - t_2 t_3^2, t_1^2 - t_2^2 + t_2 t_3 - t_3^2)$ y los parámetros básicos de $C_{\mathbb{X}}(d)$ son:

d	1	2	3
$ \mathbb{X} $	6	6	6
$H_{\mathbb{X}}(d)$	3	5	6
$\delta_{\mathbb{X}}(d)$	3	2	1

Existen enteros $r \geq 1$ y $r_1 \geq 1$ tales que

$$1 = H_{\mathbb{X}}(0) < H_{\mathbb{X}}(1) < \cdots < H_{\mathbb{X}}(r-1) < H_{\mathbb{X}}(d) = |\mathbb{X}|$$

para $d \geq r = \text{reg}(S/I(\mathbb{X}))$,

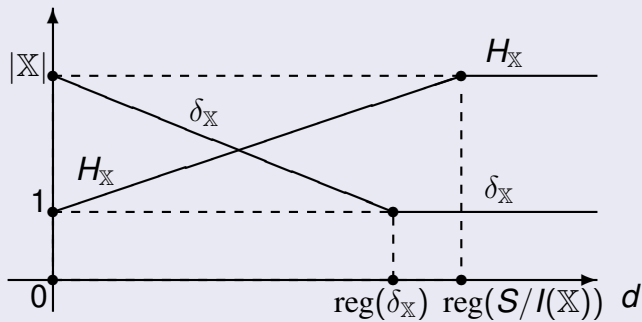
$$|\mathbb{X}| = \delta_{\mathbb{X}}(0) > \delta_{\mathbb{X}}(1) > \cdots > \delta_{\mathbb{X}}(r_1) = \delta_{\mathbb{X}}(d) = 1 \text{ para } d \geq r_1.$$

El entero r_1 , denotado por $\text{reg}(\delta_{\mathbb{X}})$, se llama el **índice de regularidad** de $\delta_{\mathbb{X}}$.

En general $\text{reg}(\delta_{\mathbb{X}}) \leq \text{reg}(S/I(\mathbb{X}))$, pues usando

$$\delta_{\mathbb{X}}(d) \leq |\mathbb{X}| - H_{\mathbb{X}}(d) + 1,$$

obtenemos que $\delta_{\mathbb{X}}(d) = 1$ para $d \geq \text{reg}(S/I(\mathbb{X}))$.



El comportamiento asintótico de H_X y δ_X

Ejemplo

Sea K el campo $\mathbb{F}_3$. Consideremos el conjunto

$$\mathbb{X} = \{[1, 1, 1], [1, -1, 0], [1, 0, -1], [0, 1, -1], [1, 0, 0]\} \subset \mathbb{P}^2$$

Usando *Macaulay2*, obtenemos que $\text{reg}(S/I(\mathbb{X})) = 3$.

Tenemos que $\delta_{\mathbb{X}}(1) = 1$ pues el polinomio $t_1 + t_2 + t_3$ se anula en todos los puntos de $\mathbb{X} \setminus \{[1, 0, 0]\}$.

Por lo tanto $1 = \text{reg}(\delta_{\mathbb{X}}) < \text{reg}(S/I(\mathbb{X})) = 3$

existen varias familias donde $\text{reg}(\delta_{\mathbb{X}}) = \text{reg}(S/I(\mathbb{X}))$.

Problema Principal:

Si $\mathbb{X}$ tiene una “buena” estructura algebraica o combinatoria encontrar fórmulas, en términos de s, q, d , y la estructura de $\mathbb{X}$, para los *parámetros básicos* de $C_{\mathbb{X}}(d)$:

- (a) $H_{\mathbb{X}}(d)$,
- (b) $\deg(S/I(\mathbb{X}))$,
- (c) $\delta_{\mathbb{X}}(d)$,
- (d) $\operatorname{reg}(S/I(\mathbb{X}))$.

Los siguientes casos son de interés:

- $\mathbb{X}$ está parametrizado por monomios $y^{v_1}, \dots, y^{v_s}$.
- $\mathbb{X}$ es un “conjunto Cartesiano proyectivo anidado”.
- $\mathbb{X} = V_{\mathbb{P}^{s-1}}(\{t_i t_j^{d_j} - t_i^{d_j} t_j : 1 \leq i < j \leq s\})$

GRACIAS POR SU ATENCIÓN!

FIN